1

Matemática Financeira

Amilton Dalledone Filho
Glower Lopes Kujew

O mundo globalizado nos mostra cada vez mais a necessidade de informações e, para tanto, é necessário o conhecimento básico que possibilita o entendimento de conceitos mais apurados.

Este raciocínio é o que norteia a **Matemática Financeira que se preocupa com o estudo do valor do dinheiro no tempo**, sendo uma base de conhecimento indispensável para o entendimento da Engenharia Financeira e da Análise de Investimentos, pois fornece as ferramentas necessárias ao desenvolvimento das diversas teorias existentes.

Todo investidor busca a melhor rentabilidade de seus recursos, e para que se possa medir o seu retorno faz-se necessária a aplicação de cálculos financeiros que possibilitam a tomada de decisão e a gestão financeira das empresas. Grandes corporações têm investido muitos recursos no desenvolvimento de profissionais capacitados a entender e buscar as melhores opções de negócios.

Com o intuito de auxiliar no entendimento de alguns conceitos básicos que auxiliam na introdução ao ensino da Matemática Financeira, desenvolveu-se este material que, sem nenhuma pretensão de esgotar o assunto, irá fornecer conceitos fundamentais ao aprendizado dos leitores. Para facilidade de entendimento, este material foi dividido em tópicos, que seguem uma lógica de entendimento, além de exemplos clarificando os conceitos mostrados praticamente através da utilização da máquina calculadora HP 12 C. Assim, o primeiro item aborda as operações básicas que envolvem a margem de lucro sobre o preço de compra e sobre o preço de venda. Já o segundo item traz o conceito de juros simples, que, apesar de ter utilização restrita no mercado financeiro, é de fundamental importância para o entendimento dos juros compostos, que fazem parte do terceiro item. Neste, aborda-se também a questão das taxas, onde é trabalhado o conceito de taxas efetivas e nominais conforme os seus períodos de capitalização. E, para encerrar este trabalho, o último item trata das séries de pagamentos uniformes, utilizadas sobremaneira no mercado pelas financeiras através, principalmente, dos empréstimos pessoais conhecidos como CDC (Crédito Direto ao Consumidor), além é claro do comércio de forma.

Esperamos atender às suas expectativas através deste material de apoio, que nada mais é que um princípio no estudo das finanças.

1 Operações básicas

Formas de apresentação da taxa

Centesimal ou percentual (%)

Corresponde a referência da taxa a **cem unidades de capital**.

Exemplo:

1. i = 2% ao mês
2. i = 0,45% ao dia

Unitária

Corresponde a referência da taxa a **uma unidade de capital**.

Exemplo:

1. 2% (forma centesimal) corresponde a 0,02 na forma unitária.
2. 0,45% (forma centesimal) corresponde a 0,0045 na forma unitária.

Operações com lucro

Elementos	**Notação**
Preço de compra	P_C
Preço de venda	P_V
Margem de lucro sobre o preço de compra	i_C
Margem de lucro sobre o preço de venda	i_V

Margem de lucro calculada sobre o preço de compra

$$P_C \;\text{———}\; 1$$

$$P_V \;\text{———}\; 1 + i_C \quad \therefore \quad P_V = P_C \cdot (1 + i_C)$$

Exemplos:

1. Determinado produto foi adquirido por R$ 400,00, obtendo-se na venda a margem de lucro sobre o preço de compra de 15%. Qual o preço de venda do produto?
   Dados: P_C = R$ 400,00; i_C = 15%; P_V = ?

$$P_V = P_C \cdot (1 + i_C) = 400 \cdot (1 + 0{,}15) = \text{R\$}\,460{,}00$$

2. Um produto foi adquirido por R$ 300,00 e vendido por R$ 360,00. Calcule a margem de lucro obtida sobre o preço de compra.
   Dados: P_C = R$ 300,00; P_V = R$ 360,00; i_C = ?

$$P_V = P_c \,.\, (1 + i_c) \therefore \frac{P_V}{P_c} = 1 + i_c \;\therefore\; i_c = \frac{P_V}{P_c} - 1 = \frac{360}{300} - 1 = 0{,}2 = 20\%$$

Margem de lucro calculada sobre o preço de venda

$$\begin{array}{lcl} P_V & \text{———————} & 1 \\ P_c & \text{———————} & 1 - i_V \quad \therefore \quad P_c = P_V \,.\, (1 - i_V) \end{array}$$

Exemplos:

1. Determinado produto foi adquirido por R$ 450,00. Se a margem de lucro sobre o preço de venda obtido foi igual a 15%, qual o preço de venda do produto?
   Dados: P_C = R$ 400,00; i_C = 15%; P_V = ?

$$P_c = P_V \,.\, (1 - i_V) \;\therefore\; P_V = \frac{P_c}{1 - i_c} = \frac{450}{1 - 0{,}15} = \text{R\$}\,529{,}41$$

2. Um produto foi adquirido por R$ 300,00 e vendido por R$ 360,00. Calcule a margem de lucro obtida sobre o preço de venda.
   Dados: P_C = R$ 300,00; P_V = R$ 360,00; i_V = ?

$$P_c = P_V \,.\, (1 - i_V) \therefore \frac{P_c}{P_V} = 1 - i_V \;\therefore\; i_V = 1 - \frac{P_c}{P_V} = 1 - \frac{300}{360} = 0{,}1667 = 16{,}67\%$$

Relação entre margem de lucro sobre o preço de compra e preço de venda

Se $i_c = \frac{P_V}{P_c} - 1$ então $i_c - 1 = \frac{P_V}{P_c}$ (I)

e sendo $i_V = 1 - \frac{P_c}{P_V}$ logo $\frac{1}{1 - i_V} = \frac{P_V}{P_c}$ (II)

Igualando (I) e (II) temos: $i_C - 1 = \dfrac{1}{1 - i_V}$ portanto: $i_C = \dfrac{i_V}{1 - i_V}$ e $i_V = \dfrac{i_C}{1 + i_C}$

Exemplos

1. Se a margem de lucro sobre o preço de compra é igual a 25%, qual a margem de lucro sobre o preço de venda?
   Dados: $i_C = 25\%$; $i_V = ?$

   $$i_V = \frac{i_C}{1 + i_C} = \frac{0{,}25}{1 + 0{,}25} = \frac{0{,}25}{1{,}25} = 0{,}2 = 20\%$$

2. Se a margem de lucro sobre o preço de venda é igual a 20%, qual a margem de lucro sobre o preço de compra?
   Dados: $i_V = 20\%$; $i_C = ?$

   $$i_V = \frac{i_V}{1 - i_V} = \frac{0{,}2}{1 - 0{,}2} = \frac{0{,}2}{0{,}8} = 0{,}25 = 25\%$$

2 JUROS SIMPLES

O regime de juros simples ou de capitalização simples é aquele em que a taxa de juros incide somente sobre o capital inicial.

Elementos	**Notação**
Valor futuro ou montante	M
Valor presente ou principal	V
Taxa de juros	i
Número de períodos	n
Juros simples	j

Cálculo dos juros simples

$J = P \cdot i \cdot n$ (I)

Exemplo: A dívida de R$ 600,00 deverá ser liquidada 21 dias após o vencimento, à taxa de juros de 0,3% ao dia. Calcular os juros simples a serem pagos.

Dados: P = R$ 600,00; i = 0,3% ao dia; n = 21 dias; J = ?

$J = P \cdot i \cdot n = 600 \cdot 0{,}003 \cdot 21 =$ R$ 37,80

Cálculo do valor futuro ou montante

$$M = P + J \quad (II) \quad \therefore \quad M = P + P.i.n \quad \therefore \quad M = P.(1 + i.n) \quad (III)$$

Exemplo: A dívida de R$ 1.200,00 deverá ser liquidada 24 dias após o vencimento, à taxa de juros de 0,25% ao dia. Calcular a quantia que liquidará a dívida.

Dados: P = R$ 1.200,00; i = 0,25% ao dia; n = 24 dias; M = ?

$$M = P \cdot (1 + i \cdot n) = 1.200 \cdot (1 + 0{,}0025 \cdot 24) = R\$1.272{,}00$$

Proporcionalidade entre as taxas

No regime de juros simples, existe proporcionalidade entre as taxas. Quando uma taxa é fornecida em uma unidade de tempo diferente daquela a que se refere o prazo da operação, basta modificarmos a sua unidade de tempo utilizando uma proporção.

Exemplo: A dívida de R$ 4.500,00 deverá ser liquidada 18 dias após o vencimento, à taxa de juros de 6% ao mês. Calcular a quantia que liquidará a dívida.

Dados: P = R$ 4.500,00; i = 6% ao mês; n = 18 dias; M = ?

Neste caso, a unidade de tempo da taxa é diferente daquela a que se refere o prazo da operação. Portanto, para modificarmos a unidade de tempo da taxa fazemos:

i_m ———— 6%

i_d ———— x

$$x = \frac{6\%}{30} = 0{,}2\%$$ ao dia

$$\therefore \quad M = P.(1 + i.n) = 4.500.(1 + 0{,}002.18) = R\$\ 4.662{,}00$$

3 DESCONTO SIMPLES

O desconto deve ser entendido como sendo a diferença entre o valor futuro (valor nominal) de um título e seu valor presente (valor atual) quando o mesmo é negociado antes do vencimento. O desconto é denominado simples quando é obtido através de cálculos lineares.

Elementos	**Notação**
Valor nominal ou valor futuro	N
Valor presente ou valor atual	V
Taxa de desconto simples	i
Número de períodos de antecipação ou prazo	n
Desconto simples comercial	d

Desconto simples comercial ou desconto "por fora"

O desconto simples comercial é calculado sobre o valor nominal do título, ou seja:

$$d = N \cdot i \cdot n$$

Portanto, o valor atual do título pode ser obtido fazendo-se:

$$V = N - d \quad \therefore \quad V = N - N.i.n \quad \therefore \quad V = N.(1 - i.n)$$

Exemplos:

1. Um título no valor de R$ 14.000,00 deverá ser negociado 75 dias antes do vencimento à taxa do desconto simples comercial de 6% ao mês. Determinar o valor do desconto bem como o valor atual do título.
   Dados: N = R$ 14.000,00; i = 6% ao mês; n = 75 dias = 2,5 meses; V = ?

   $$d = N \cdot i \cdot n = 14.000 \cdot 0{,}06 \cdot 2{,}5 = R\$\,2.100{,}00$$

   Cálculo do valor atual do título:

   $$V = N - d = 14.000 - 2.100 = R\$\,11.900{,}00$$

2. Uma duplicata é descontada em uma instituição financeira, produzindo um crédito na conta do cliente de R$ 4.640,00. Se a taxa do desconto simples comercial da operação foi de 4,5% ao mês e a duplicata foi negociada 48 dias antes do vencimento, determinar o valor futuro (nominal) da duplicata.
   Dados: V = R$ 4.640,00; i = 4,5% ao mês; n = 48 dias = 1,6 meses; N = ?

   $$V = N \cdot (1 - i \cdot n) \quad \therefore \quad N = \frac{V}{1 - i \cdot n} = \frac{4.640}{1 - 0{,}045 \cdot 1{,}6} = R\$\,5.000{,}00$$

3. Um título no valor de R$ 8.000,00 foi negociado 54 dias antes de seu vencimento por R$ 7.208,00. Determinar a taxa do desconto simples comercial envolvida na operação.

Dados: V = R$; i = 4,5% ao mês; n = 54 dias = 1,8 meses; N = ?

$$V = N \cdot (1 - i \cdot n) \;\therefore\; 7.208 = 8000 \cdot (1 - i \cdot 1{,}8) \;\therefore\; \frac{7.208}{8.000} = 1 - 1{,}8 \cdot i \;\therefore$$

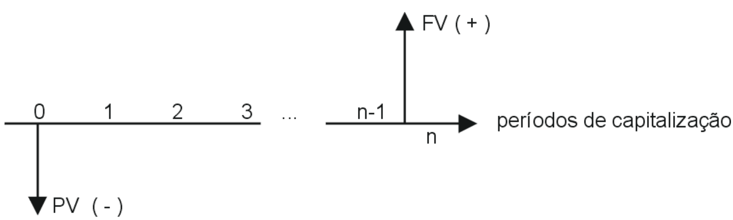
$$1{,}8 \cdot i = 1 - 0{,}901 \;\therefore\; 1{,}8 \cdot i = 0{,}099 \;\therefore\; i = \frac{0.099}{1{,}8} = 0{,}055 = 5{,}5\% \text{ ao mês}$$

4 CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

Capitalização composta é aquela em que a **taxa de juros incide sempre sobre o capital inicial acrescido dos juros acumulados até o período imediatamente anterior**. Neste regime de capitalização a taxa de juros varia exponencialmente em função do tempo.

Elementos	**Notação**
Valor futuro ou montante	FV
Valor presente ou principal	PV
Taxa de juros	i
Número de períodos de capitalização ou prazo	n
Juros compostos	j

Fluxo de caixa da operação



Cálculo do valor futuro ou montante

$$FV = PV + J \qquad (I)$$

$$FV_0 = PV_0 \cdot (1+i)^0$$

$$FV_1 = FV_0 \cdot (1+i)^1 = PV_0 \cdot (1+i)^1$$

$$FV_2 = FV_1 \cdot (1+i) = PV_0 \cdot (1+i)^1 \cdot (1+i)^1 = PV_0 \,.\, (1+i)^2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$FV_{n-1} = FV_{n-2} \cdot (1+i) = PV_0 \cdot (1+i)^{n-2} \cdot (1+i) = PV_0 \cdot (1+i)^{n-1}$$

$$FV_n = FV_{n-1} \cdot (1+i) = PV_0 \cdot (1+i)^{n-1} \cdot (1+i) = PV_0 \cdot (1+i)^n$$

Generalizando, $FV = PV \,.\, (1 + i)^n$ (II), onde $(1 + i)^n$ é denominado fator de acumulação de capital para pagamento único (fac) que depende da taxa de juros e do número de períodos de capitalização.

Cálculo dos juros compostos

Da equação (I) temos que $J = FV - PV$.

Substituindo a equação (II) em $J = FV - PV$ obtemos

$$J = PV \cdot (1+i)^n - PV \quad \therefore \quad J = PV \cdot \left[(1+i)^n - 1\right]$$

Obs.: O período de capitalização e a taxa de juros devem estar referidos à mesma unidade de tempo.

Exemplos:

1. Calcular o valor futuro produzido pela aplicação de R$ 12.000,00 pelo prazo de 6 meses à taxa efetiva de juros de 5% ao mês.
   Dados: PV = R$ 12.000,00; n = 6 meses; i = 5% ao mês; FV = ?

$$FV = PV \cdot (1+i)^n = 12.000 \cdot (1+0{,}05)^6 = 12.000 \cdot 1{,}3400956 = R\$ 16.081{,}15$$

HP 12C			
	f fin CLx		
	12.000	CHS PV	
	5	i	
	6	n	
		FV	R$ 16.081,15

2. Determinar a quantia que aplicada pelo prazo de 5 meses, à taxa efetiva de juros de 4% ao mês, produziu o valor futuro de R$ 11.558,20.
   Dados: FV = R$ 11.558,20; i = 4% ao mês; n = 5 meses; PV = ?

$$FV = PV \cdot (1+i)^n \quad \therefore \quad PV = \frac{FV}{(1+i)^n} = \frac{11.558{,}20}{(1+0{,}04)^5} = \frac{11.558{,}20}{1{,}216653} = R\$ 9.500{,}00$$

HP 12C		
f fin CLx		
11.558,20	FV	
4	i	
5	n	
	PV CHS	R$ 9.500,00

3. O empréstimo de R$ 5.400,00 foi liquidado após 3 meses por R$ 6.431,49. Calcule a taxa efetiva de juros da operação.
   Dados: PV = R$ 5.400,00; FV = R$ 6.431,49; n = 3 meses; i = ?

$$FV = PV \cdot (1+i)^n \therefore (1+i)^n = \frac{FV}{PV} \therefore 1+i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} \therefore$$

$$i = \sqrt[3]{\frac{FV}{PV}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{6.431,49}{5.400}} - 1 = \sqrt[3]{1,19101667} - 1 = 1,06 - 1 = 0,06 = 6\% \text{ ao mês}$$

HP 12C		
f fin CLx		
6.431,49	FV	
5.400	CHS PV	
3	n	
	i	6

4. Determinar o número de meses da aplicação de R$ 15.000,00 efetuada à taxa efetiva de juros de 3% ao mês e que produziu o valor futuro de R$ 16.882,63.
   Dados: FV = R$ 16.882,63; PV = R$ 15.000,00; i = 3% ao mês; n = ?

$$FV = PV \cdot (1+i)^n \therefore (1+i)^n = \frac{FV}{PV} \therefore \ln(1+i)^n = \ln\left(\frac{FV}{PV}\right) \therefore n \cdot \ln(1+i) = \ln\left(\frac{FV}{PV}\right) \therefore$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{FV}{PV}\right)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left(\frac{16.882,63}{15.000}\right)}{\ln(1+0,03)} = \frac{\ln 1,1255088}{\ln 1,03} \therefore n = \frac{0,11823520}{0,0295588} = 4 \text{ meses}$$

Resolução utilizando calculadora financeira

HP 12C		
f fin CLx		
16.882,63	FV	
15.000	CHS PV	
3	i	
	n	4

5 TAXAS

Taxa Efetiva: A taxa efetiva pressupõe incidência de juros apenas uma única vez em cada período a que se refere a taxa, isto é, **a unidade de tempo da taxa coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização**, ou seja, a taxa efetiva é a taxa por período de capitalização. Quando o período de capitalização não é mencionado, fica subentendido que o mesmo coincide com o período de tempo da taxa.

Exemplos:

1. 24% ao ano, capitalização anual ou 24% ao ano.
2. 10% ao mês, capitalização mensal ou 10% ao mês.

Taxa nominal: A taxa nominal pressupõe incidência de juros mais de uma vez em cada período a que e refere a taxa, isto é, **a unidade de tempo a que se refere a taxa *não coincide* com a unidade de tempo dos períodos de capitalização**. Quando uma taxa for enunciada desta forma, para que a mesma seja aplicável às fórmulas com as quais trabalhamos, devemos primeiramente transformá-la em taxa efetiva utilizando o critério da proporcionalidade, fazendo coincidir a unidade de tempo da taxa com a unidade de tempo do período de capitalização.

Exemplos:

1. 24% ao ano, capitalização mensal ou 2% ao mês.
2. 6% ao mês, capitalização diária ou 0,2% ao dia (1 mês com 30 dias).

Taxas equivalentes: duas taxas são ditas equivalentes quando, embora referidas a unidades de tempo diferentes, aplicadas sobre o mesmo capital, durante o mesmo período, produzem o mesmo valor.

Elementos	**Notação**
Taxa que quero calcular	i_q
Taxa que tenho	i_t
Unidade da taxa que quero calcular	q
Unidade da taxa que tenho	t

Cálculo da taxa equivalente: $i_q = (1 + i_t)^{q/t} - 1$

Exemplos:

1. Suponha as taxas de 10% ao mês e 33,10% ao trimestre. Considere o capital de R$ 20.000,00 aplicado durante 3 meses a essas taxas. Os valores futuros produzidos são:

Dados: PV = R$ 20.000,00; n = 3 meses = 1 trimestre; i_1 = 10% ao mês; i_2 = 33,1% ao trimestre

$$FV = PV \cdot (1+i_1)^n = 20.000 \cdot (1+0{,}1)^3 = R\$\ 26.620{,}00$$

$$FV = PV \cdot (1+i_2)^n = 20.000 \cdot (1+0{,}331)^1 = R\$\ 26.620{,}00$$

Nesse caso podemos afirmar que as taxas de 10% ao mês e 33,1% ao trimestre são equivalentes, senão vejamos, **qual a taxa trimestral equivalente a taxa de 10% ao mês**?

Dados: i_t =10% ao mês; t = 1 mês; q = 1 trimestre = 3 meses; i_q = ?

$$i_q = (1+i_t)^{q/t} - 1 = (1+0{,}1)^{3/1} - 1 = 1{,}1^3 - 1 = 1{,}331 - 1 = 0{,}331 = 33{,}1\%\ \text{ao trimestre}$$

2. Determinar a taxa anual equivalente a taxa de 10% ao mês.
   Dados: i_t = 10% ao mês; t = 1 mês; q = 1 ano = 12 meses; i_q = ?

$$i_q = (1+i_t)^{q/t} - 1 = (1+0{,}1)^{12/1} - 1 = 1{,}1^{12} - 1 = 3{,}1384 - 1 = 2{,}1384 = 213{,}84\%\ \text{ao ano}$$

3. Determinar a taxa mensal equivalente à taxa de 120% ao ano.
   Dados: i_t = 120% ao ano; t = 1 ano = 12 meses; q = 1 mês; i_q = ?

$$i_q = (1+i_t)^{q/t} - 1 = (1+1{,}2)^{1/12} - 1 = 2{,}2^{0{,}0833333} - 1 = 1{,}0679 - 1 = 0{,}0679 = 6{,}79\%\ \text{ao mês}$$

4. A quantia de R$ 6.000,00 será aplicada à taxa de 30% ao ano capitalização mensal pelo prazo de 12 meses. Determinar o valor futuro (montante) produzido pela aplicação.
   Dados: PV = R$ 6.000,00; i = 30% ao ano cap. mensal; n = 12 meses; FV = ?
   A taxa apresentada é nominal, pois a unidade de tempo da taxa (ano) é diferente da unidade de tempo a que se refere o período de capitalização (mês); portanto, primeiramente devemos transformá-la em taxa efetiva, utilizando o critério da proporcionalidade.

i_a ———— 30% ———— 12 meses
i_m ———— x ———— 1 mês

$$x = \frac{30\%}{12} = 2{,}5\%\ \text{ao mês}\ \therefore$$

$$FV = PV \cdot (1+i)^n = 6.000 \cdot (1+0{,}025)^{12} = 6.000 \cdot 1{,}348888 = R\$\ 8.069{,}33$$

5. Considerando o mesmo enunciado do exemplo anterior, mas supondo que a taxa seja de 30% ao ano, qual o valor futuro produzido pela aplicação? Compare os resultados obtidos.

Dados: PV = R$ 6.000,00; i = 30% ao ano; n = 12 meses = 1 ano; FV = ?

A taxa apresentada agora é efetiva, pois, embora omitido, fica subentendido que o período de capitalização coincide com a unidade de tempo da taxa (ano). Nesse caso, podemos aplicá-la diretamente na fórmula, efetuando a mudança conveniente no prazo da aplicação.

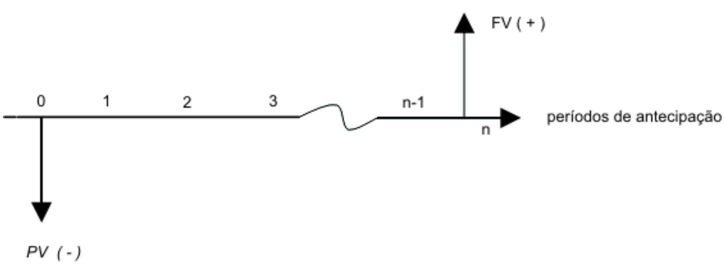
$$FV = PV \cdot (1+i)^n = 6.000 \cdot (1+0,3)^1 = 6.000 \cdot 1,3 = R\$\ 7.800,00$$

6 DESCONTO COMPOSTO

O conceito de desconto no regime de capitalização composta é idêntico ao do regime de juros simples: corresponde ao abatimento por saldar-se um compromisso antes do seu vencimento. A diferença é devida apenas ao regime de juros, sendo o raciocínio financeiro o mesmo. O que fazemos é calcular a diferença entre o valor nominal e o valor atual do compromisso na data em que se propõe que seja efetuado o desconto. O desconto corresponde à quantia a ser abatida do valor nominal, e o valor descontado é a diferença entre o valor nominal e o desconto.

Elementos	**Notação**
Valor nominal ou valor futuro	FV
Valor presente ou valor atual	PV
Taxa de desconto	i
Número de períodos de antecipação ou prazo	n
Desconto composto	d

Fluxo de caixa da operação



Cálculo do valor atual ou valor presente: $PV = \dfrac{FV}{(1+i)^n}$

Cálculo do desconto composto: $d = FV - PV$

Exemplo:

Um título no valor de R$ 40.000,00 deverá ser negociado 3 meses antes do vencimento, à taxa efetiva do desconto composto de 5% ao mês. Determinar o valor do desconto bem como o valor atual do título.

Dados: FV = R$ 40.000,00; i = 5% ao mês; n = 3 meses; PV = ?

Cálculo do valor atual do título

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n} = \frac{40.000}{(1+0,05)^3} = R\$34.553,50$$

Cálculo do desconto

$$d = FV - PV = 40.000 - 34.553,50 = R\$\,5.446,50$$

HP 12C			
	f fin CLx		
	40.000	FV	
	3	n	
	5	i	
		PV CHS	R$ 34.553,50

7 SÉRIES DE PAGAMENTOS UNIFORMES

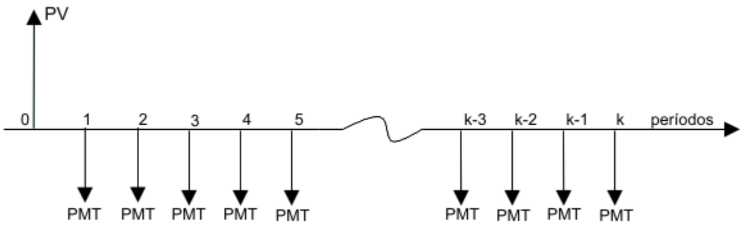
Séries de Recuperação de Capital

É a série que mostra o retorno do capital através de pagamentos iguais e periódicos. Este retorno pode ser de um empréstimo ou da aquisição de um bem.

Elementos	**Notação**
Valor presente ou valor financiado	PV
Pagamento ou prestação	PMT
Taxa de juros	i
Número de pagamentos	n
Período de diferimento ou carência	m

Série de “n” pagamentos, periódicos, iguais e postecipados

Caracterização da série



Cálculo do pagamento:

$$PMT = PV \cdot \left[\frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Exemplos:

1. O preço à vista de uma geladeira é de R$ 1.000,00. Entretanto a mesma pode ser adquirida em 6 pagamentos mensais iguais, com primeiro pagamento efetuado 30 dias após a compra. Se, nos financiamentos, a loja cobra a taxa efetiva de juros de 5% ao mês, determinar o pagamento mensal a ser efetuado.
   Dados: PV = R$ 1.000,00; n = 6 pagamentos mensais; i = 5% ao mês; PMT = ?

$$PMT = PV \cdot \left[\frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}\right] = 1.000 \cdot \left[\frac{(1+0,05)^6 \cdot 0,05}{(1+0,06)^6 - 1}\right] = R\$197,02$$

HP 12C			
	f fin CLx		
	1000	CHS PV	
	5	i	
	6	n	
	g END	PMT	R$ 197,02

2. O preço à vista de um televisor com tela de 20 polegadas é de R$ 700,00. Entretanto o mesmo pode ser adquirido da seguinte forma: entrada correspondente a 25% do preço a vista e o restante financiado em 4 pagamentos mensais iguais. Se, nos financiamentos, a loja cobra a taxa efetiva de juros de 6% ao mês, determinar o pagamento mensal a ser efetuado.

Dados: PV = 0,75 . 700 = R$ 525,00; n = 4 pagamentos mensais; i = 6% ao mês; PMT = ?

$$PMT = PV \cdot \left[\frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \right] = 525 \cdot \left[\frac{(1+0{,}06)^4 \cdot 0{,}06}{(1+0{,}06)^4 - 1} \right] = R\$151{,}51$$

HP 12C			
	f fin CLx		
	199,04	CHS PMT	
	8	i	
	12	n	
	g END	PMT	R$ 151,51

Cálculo do valor presente: $PV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right]$

Exemplo:

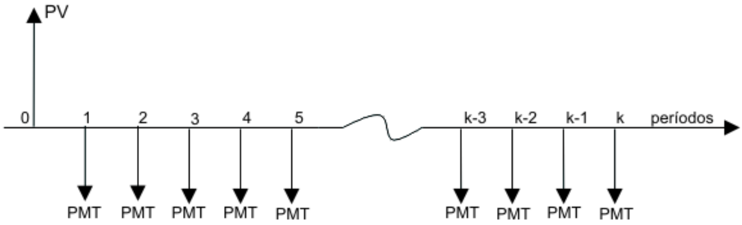
1. Para liquidar um empréstimo, uma pessoa deverá efetuar 12 pagamentos mensais iguais de R$ 199,04. Sabendo-se que a financeira cobra a taxa efetiva de juros de 8% ao mês, calcule a quantia que essa pessoa tomou emprestado.
   Dados: PMT = R$ 199,04; n = 12 pagamentos mensais; i = 8% ao mês; PV = ?

$$PV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right] = 199{,}04 \cdot \left[\frac{(1+0{,}08)^{12} \cdot 1}{(1+0{,}08)^{12} - 0{,}08} \right] = R\$1.500{,}00$$

HP 12C			
	f fin CLx		
	199,04	CHS PMT	
	8	i	
	12	n	
	g END	PV	R$ 1.500.00

Série de “n” pagamentos, periódicos, iguais e antecipados

Caracterização da série



Cálculo do pagamento: $PMT = PV \cdot \left[\dfrac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \right]$

Exemplos:

1. O preço à vista de uma geladeira é de R$ 1.000,00. Entretanto a mesma pode ser adquirida em 6 pagamentos mensais iguais, com primeiro pagamento dado como entrada. Se, nos financiamentos, a loja cobra a taxa efetiva de juros de 5% ao mês, determinar o pagamento mensal a ser efetuado.
   Dados: PV = R$ 1.000,00; n = 6 pagamentos mensais; i = 5% ao mês; PMT = ?

$$PMT = PV \cdot \left[\frac{(1+i)^{n-1} \cdot i}{(1+i)^n - 1} \right] = 1.000 \cdot \left[\frac{(1+0,05)^{6-1} \cdot 0,05}{(1+0,05)^6 - 1} \right] = R\$187,64$$

Resolução utilizando calculadora financeira

HP 12C			
	f fin CLx		
	1.000	CHS PV	
	5	i	
	6	n	
	g BEG	PMT	R$ 187,64

2. O preço à vista de um televisor com tela de 20 polegadas é de R$ 700,00. Entretanto o mesmo pode ser adquirido em 10 pagamentos mensais iguais de R$ 96,59. Determinar a taxa efetiva mensal de juros cobrada pela loja.

Dados: PV = R$ 700,00; n = 10 pagamentos mensais;
PMT = R$ 96,59; i = ?
Em virtude da impossibilidade de isolarmos a taxa (i) nas fórmulas anteriores, recomenda-se a utilização de uma calculadora financeira.

HP 12C			
	f fin CLx		
	700	CHS PV	
	96,59	PMT	
	10	n	
	g BEG	i	8% ao mês

Cálculo do valor presente: $PV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}\right]$

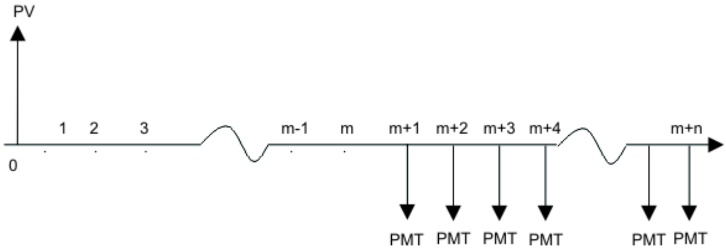
Exemplo
1. Uma empresa adquiriu determinado equipamento e para liquidar a dívida comprometeu-se a efetuar 18 pagamentos mensais iguais de R$ 645,62, e o primeiro pagamento dado como entrada. Sabendo-se que a taxa efetiva de juros da operação é de 4% ao mês, calcule o valor financiado.
   Dados: PMT = R$ 645,62; n = 18 pagamentos mensais; i = 4% ao mês; PV = ?

$$PV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n-1} \cdot i}\right] = 645{,}62 \cdot \left[\frac{(1+0{,}04)^{18} - 1}{(1+0{,}04)^{18-1} \cdot 0{,}04}\right] = R\$\ 8.500{,}00$$

HP 12C			
	f fin CLx		
	645,62	CHS PMT	
	4	i	
	18	n	
	g BEG	PV	R$ 8.500,00

Séries de "n" pagamentos, periódicos iguais e postecipados, diferidos de "m" períodos de tempo

Caracterização da série



Cálculo do pagamento: $PMT = PV \cdot \left[\dfrac{(1+i)^{n+m} \cdot i}{(1+i)^{n} - 1}\right]$

Exemplo:

1. O empréstimo de R\$ 50.000,00 deverá ser liquidado em 12 pagamentos mensais iguais, à taxa efetiva de juros de 3% ao mês. Sabendo-se que está estipulado para a operação o período de carência de 5 meses, calcular o pagamento mensal a ser efetuado.
   Dados: PV = R\$ 50.000,00; n = 12 pag. mensais; i = 3% ao mês; m = 5 meses; PMT = ?

$$PMT = PV \cdot \left[\frac{(1+i)^{n+m} \cdot i}{(1+i)^{n-1} - 1}\right] = 50.000 \cdot \left[\frac{(1+0{,}03)^{12+5} \cdot 0{,}03}{(1+0{,}03)^{12} - 1}\right] = R\$\ 5.823{,}15$$

HP 12C			
	f fin CLx		
	50.000	CHS PV	
	5	n	
	3	i	
		FV	R\$ 57.963,70
	f fin CLx		
	57.963,70	CHS PV	
	12	n	
	3	I	
		PMT	R\$ 5.823,15

Cálculo do valor presente: $PV = PMT \cdot \left[\dfrac{(1+i)^{n} - 1}{(1+i)^{n+m} \cdot i}\right]$

Exemplo

1. Determinada dívida deverá ser liquidada em 18 pagamentos mensais iguais de R$ 2.998,55. Sabendo-se que está envolvido na operação o período de carência de 6 meses e que a taxa efetiva de juros é de 4% ao mês, calcular o valor da dívida.
   Dados: PMT = R$ 2.998,55; n = 18 pag. mensais; i = 4% ao mês; m = 6 meses; PV = ?

$$PV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n+m} \cdot i}\right] = 2.998,55 \cdot \left[\frac{(1+0,04)^{18} - 1}{(1+0,04)^{18+6} \cdot 0,04}\right] = R\$\ 30.000,00$$

HP 12C			
	f fin CLx		
	2.998,55	CHS PMT	
	18	n	
	4	i	
		PV	R$ 37.959,57
	f fin CLx		
	37.959,57	CHS FV	
	6	n	
	4	I	
		PV	R$ 30.000,00

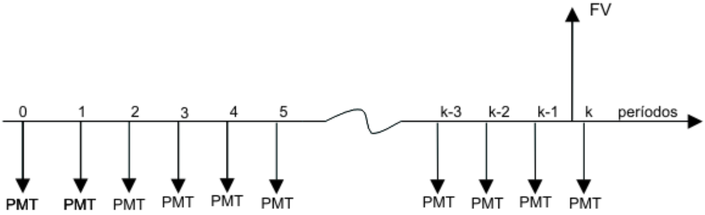
Séries de Formação de Capital

É a série que mostra a acumulação de capital através de depósitos iguais e periódicos. O valor futuro (montante) produzido pelas aplicações poderá servir como poupança ou para a aquisição de bens.

Elementos	**Notação**
Valor futuro ou montante	FV
Depósito ou pagamento	PMT
Taxa de juros	i
Número de depósitos (pagamentos)	n

Séries de “n” depósitos (pagamentos) periódicos, iguais e antecipados

Caracterização da série



Cálculo do depósito: $PMT = \frac{FV}{1+i} \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$

Exemplo

1. Uma pessoa que tem como objetivo obter o montante de R$ 5.000,00 um mês após ter efetuado o 12º depósito mensal deseja saber qual o valor desses depósitos, sabendo-se que os mesmos serão remunerados à taxa efetiva de juros de 2,5% ao mês.
   Dados: FV = R$ 5.000,00; n = 12 depósitos mensais; i = 2,5 % ao mês; PMT = ?

$$PMT = \frac{FV}{1+i} \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] = \frac{5.000}{1+0,025} \cdot \left[\frac{0,025}{(1+0,025)^{12} - 1} \right] = R\$\ 353,60$$

HP 12C		
	f fin CLx	
	5.000	CHS FV
	2,5	i
	12	n
	g BEG	PMT	R$ 353,60

Cálculo do valor futuro: $FV = PMT(1+i) \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$

Exemplo:

1. Se forem efetuados 12 depósitos mensais iguais de R$ 200,00, remunerados à taxa efetiva de juros de 2% ao mês, determinar o valor futuro produzido pelas aplicações, um mês após o último depósito.

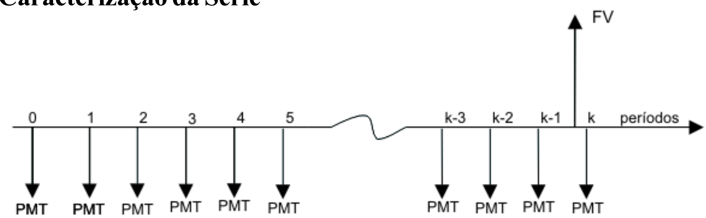
Dados: PMT = R$ 200,00; n = 12 depósitos mensais; i = 2% ao mês; FV = ?

$$FV = PMT(1+i) \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = 200 \cdot (1+0{,}02) \cdot \left[\frac{(1+0{,}02)^{12} - 1}{0{,}02}\right] = R\$\ 2.736{,}07$$

HP 12C			
	f fin CLx		
	200	CHS PMT	
	2	i	
	12	n	
	g BEG	FV	R$ 2.736,07

Séries de "n" depósitos (pagamentos) periódicos, iguais e postecipados

Caracterização da Série



Cálculo do pagamento: $PMT = FV \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$

Exemplo:

1. Uma pessoa que tem como objetivo obter o montante de R$ 5.000,00 imediatamente após ter efetuado o 12º depósito mensal, deseja saber qual o valor desses depósitos, sabendo-se que os mesmos serão remunerados à taxa efetiva de juros de 2,5% ao mês.

   Dados: FV = R$ 5.000,00; n = 12 depósitos mensais; i = 2,5 % ao mês; PMT = ?

   $$PMT = FV \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] = 5.000 \cdot \left[\frac{0{,}025}{(1+0{,}025)^{12} - 1}\right] = R\$\ 362{,}44$$

HP 12C			
	f fin CLx		
	5.000	CHS FV	
	2,5	i	
	12	n	
	g END	PMT	R$ 362,44

Cálculo do valor futuro (montante): $FV = PMT\left(1+i\right) \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$

Exemplo:

1. Se forem efetuados 12 depósitos mensais iguais de R$ 200,00, remunerados à taxa efetiva de juros de 2% ao mês, determinar o valor futuro produzido pelas aplicações, imediatamente após o último depósito.

   Dados: PMT = R$ 200,00; n = 12 depósitos mensais; i = 2% ao mês; FV = ?

$$FV = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = 200 \cdot \left[\frac{\left(1+0{,}02\right)^{12} - 1}{0{,}02}\right] = R\$\ 2.642{,}82$$

HP 12C			
	f fin CLx		
	200	CHS PMT	
	2	i	
	12	n	
	g END	FV	R$ 2.682,42

Bibliografia recomentada

SOBRINHO, José Dutra Vieira. **Matemática financeira**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 1994.

Resumo

Este capítulo apresentou alguns conceitos básicos que introduzem a Matemática Financeira. Para facilidade de entendimento, foi dividido em tópicos que seguem uma lógica de entendimento, além de exemplos clarificando os conceitos mostrados praticamente através da utilização da máquina calculadora HP 12C. Assim, o primeiro item aborda as operações básicas que envolvem margem de lucro sobre o preço de compra e sobre o preço de venda. Já o segundo item traz o conceito de juros simples, que, apesar de ter utilização restrita no mercado financeiro, é de fundamental importância para o entendimento dos juros compostos, que fazem parte do terceiro item. Neste, aborda-se também a questão das taxas, onde é trabalhado o conceito de taxas efetivas e nominais conforme os seus períodos de capitalização. Finalmente, trata-se das séries de pagamentos uniformes, utilizadas sobremaneira no mercado pelas financeiras através, principalmente, dos empréstimos pessoais conhecidos como CDC (Crédito Direto ao Consumidor), além é claro do comércio de forma.